



Chapitre 2 :

Diagrammes de Gantt et PERT

idougliq@gmail.com

Diagramme de PERT

Objectifs

- Réaliser le diagramme PERT
- Etablir les niveaux des tâches
- Tracer le PERT
- Déterminer:
 - ✓ Les dates au plus tôt
 - ✓ Les dates au plus tard
 - ✓ Les marges totales
 - ✓ Les marges libres
 - ✓ Les marges certaines
 - ✓ Le chemin critique

De quoi s'agit-il ?

- ❑ La réalisation d'un projet comporte des tâches
 - Nombreuses
 - De durée plus ou moins longue
 - Qui doivent être exécutées dans un certain ordre
 - Certaines peuvent être exécutées en parallèle
- ❑ But : trouver la meilleure organisation possible pour que le projet soit terminé à la date voulue
 - Exemple : ouverture d'un magasin
- ❑ Une des méthodes utilisées pour atteindre ce but :
 - **Program Evaluation and Review Technique**
= Technique d'évaluation et de contrôle des programmes.

Les étapes de la réalisation

1. Faire la liste des tâches
2. Attribuer un symbole à chaque tâche (par exemple: a, b, c ...)
3. Déterminer la durée de chaque tâche (le plus souvent en "jours ouvrables")
4. Déterminer pour chaque tâche la ou les tâches immédiatement antérieures.

Présentation de ces 4 étapes

Symboles	Tâches	Durée en jours	Tâches immédiatement antérieures
a	3	/
b	0,5	a
c	12	a
d	1	b,c

Application



Faire du café à l'ancienne

Symboles	Tâches	Durée en minutes	Tâches immédiatement antérieures
a	Sortir les instruments nécessaires (cafetière, café, moulin à café, casserole, filtre)	5	
b	Moudre le café	2	a
c	Faire chauffer l'eau	4	a
d	Verser le café moulu dans le filtre	1	b
e	Verser doucement l'eau sur le café moulu	3	c, d
f	Placer les tasses, cuillers, sucrier sur la table	3	
g	Apporter la cafetière et servir	2	e, f

La durée totale des tâches est de 20 minutes, mais on peut faire mieux !

5^{ème} étape de réalisation

Établir le tableau des niveaux dans l'exécution des tâches

- Placer au niveau1 toutes les tâches qui n'ont pas de tâche immédiatement antérieure
- Barrer les tâches de niveau1 dans la colonne "Tâches immédiatement antérieures"
- Placer au niveau2 toutes les tâches qui se retrouvent maintenant sans tâche immédiatement antérieure
- Et ainsi de suite jusqu'à la fin.

Tableau des niveaux

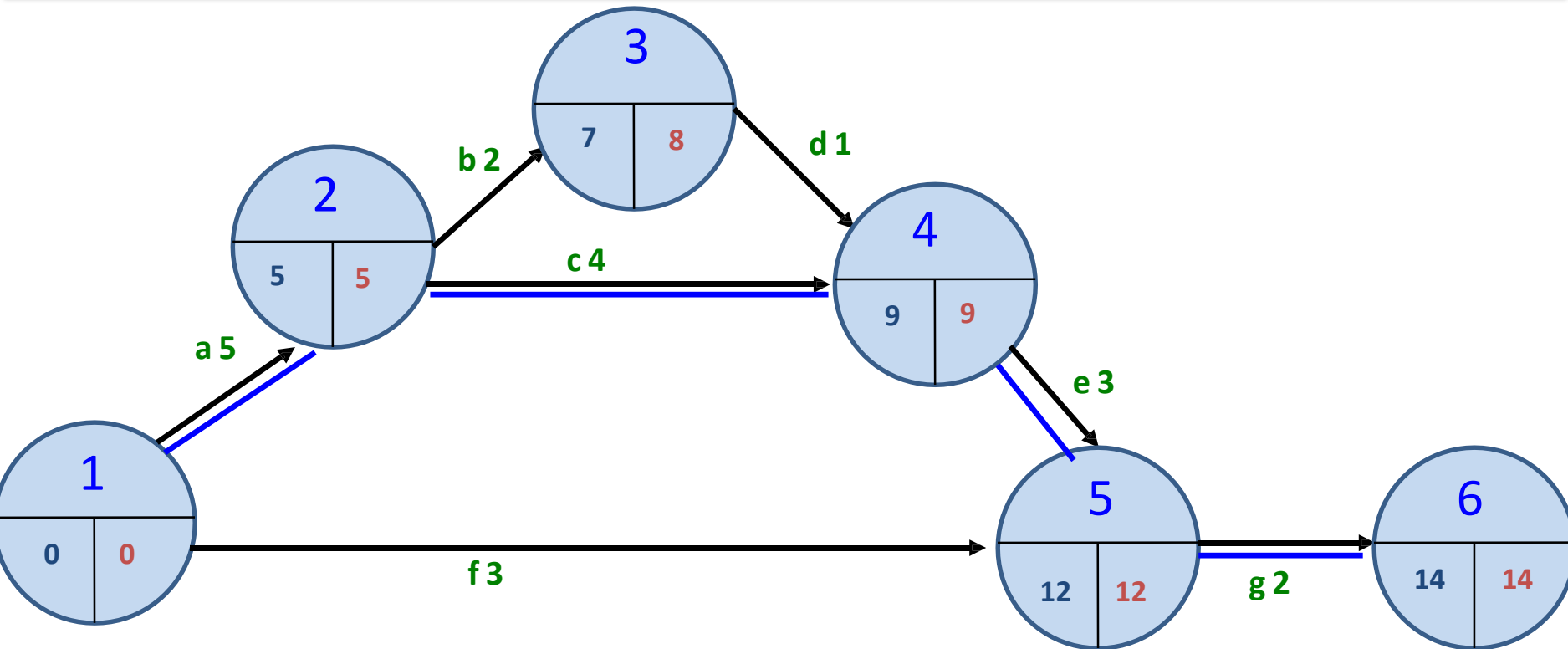
Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	Niveau 5
a, f	b, c	d	e	g

6^{ème} étape de réalisation

Construire le diagramme PERT à partir du tableau des niveaux

- Placer les tâches de niveau1, en indiquant leur symbole et leur durée, *les tâches sont symbolisées par des flèches rejoignant des cercles appelés "sommets"*
- Placer de la même manière les tâches de niveau2, puis 3, 4...
- Déterminer les "dates au plus tôt", la durée totale du programme et les "dates au plus tard"
 - Dates au plus tôt : de gauche à droite ; total le plus fort
 - Dates au plus tard : de droite à gauche ; total le plus faible
- Déterminer le chemin critique.

Diagramme PERT



Dates au plus tôt

Dates au plus tard

Chemin critique

Diagramme PERT

Dates au plus tôt: Algorithme

➤ Calculs des dates au plus **tôt**

Date de réalisation au plus tôt de l'étape

DEBUT = 0

Puis

Date de réalisation au plus tôt d'une étape

=

Max(Date de réalisation au plus tôt de l'étape précédente + [plus] Durée de l'opération menant à l'étape concernée)

Diagramme PERT

Dates au plus tôt

➤ La date au plus tôt d'une étape quelconque est obtenue en calculant le temps le plus long nécessaire pour parvenir à cette étape.

Appliquons le calcul à l'exemple précédent:

On parcourt le graphe **de gauche à droite**

$$Dt(1)=0$$

$$Dt(2)=\max\{Dt(1)+d_{12}\}=0+5=5$$

$$Dt(3)=\max\{Dt(2)+d_{23}\}=5+2=7$$

$$Dt(4)=\max\{Dt(3)+d_{34}, Dt(2)+d_{24}\}=\max\{7+1, 5+4\} \\ =\max\{8, 9\}=9$$

$$Dt(5)=\max\{Dt(4)+d_{45}, Dt(1)+d_{15}\}=\max\{9+3, 0+3\} \\ =\max\{12, 3\}=12$$

$$Dt(6)=\max\{Dt(5)+d_{56}\}=\max\{12+2\}=14$$

Diagramme PERT

Dates au plus tard: Algorithme

➤ Calculs des dates au plus **tard**

Date de réalisation au plus tard de l'étape
FIN

=

Date de réalisation au plus tôt de l'étape FIN

=

Durée totale du projet

Puis

Date de réalisation au plus tard d'une étape

=

Min(Date de réalisation au plus tard de l'étape
suivante-[moins] Durée de l'opération commençant à
l'étape concernée)

Diagramme PERT

Dates au plus tard La date au plus tard est obtenue en partant de la dernière étape, en retranchant de la date au plus tôt de cette étape le temps correspondant au chemin le plus long pour remonter jusqu'à l'étape considérée. (la date obtenue doit donc être la plus petite) Appliquons le calcul à l'exemple précédent : On parcourt le graphe de **droite à gauche**

$$Dtd(6)=14$$

$$Dtd(5)=\min\{Dtd(6)-d_{56}\}=\min\{14-2\}=12$$

$$Dtd(4)=\min\{Dtd(5)-d_{45}\}=\min\{12-3\}=9$$

$$Dtd(3)=\min\{Dtd(4)-d_{34}\}=\min\{9-1\}=8$$

$$Dtd(2)=\min\{Dtd(3)-d_{23}, Dtd(4)-d_{24}\}=\min\{8-2, 9-4\}=\min\{6,5\}=5$$

$$Dtd(1)=\min\{Dtd(2)-d_{12}, Dtd(5)-d_{15}\}=\min\{5-5, 12-3\}=\min\{0, 9\}=0$$

Diagramme PERT

Marge: Définitions

- La **marge** est la possibilité qu'à une tâche d'être retardée sans impacter le projet. Les tâches qui sont sur le chemin critique ont une marge nulle.
- La **marge totale (MT)** est égale à la différence entre le début au plus tard de la tâche suivante la plus contraignante et la fin au plus tôt de la tâche elle-même. C'est aussi la différence entre les dates au plus tard et les dates au plus tôt de la tâche elle-même.
- La **marge Libre (ML)** est égale à la différence entre la date de début au plus tôt du successeur le plus précoce, et la date de fin au plus tôt

Diagramme PERT

Calcul des marges

➤ La marge totale:

Elle indique le retard maximum que pourrait prendre la tâche sans retarder la fin de projet.

Marge totale tâche "ij" = Date au plus tard "étape j" - Date au plus tôt "étape i" - Durée tâche "ij"

Appliquons le calcul à l'exemple précédent :

$$MT(a) = y_2 - x_1 - d_{12} = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$MT(b) = y_3 - x_2 - d_{23} = 8 - 5 - 2 = 1$$

$$MT(c) = y_4 - x_2 - d_{24} = 9 - 5 - 4 = 0$$

$$MT(d) = y_4 - x_3 - d_{43} = 9 - 7 - 1 = 1$$

$$MT(e) = y_5 - x_4 - d_{45} = 12 - 9 - 3 = 0$$

$$MT(f) = y_5 - x_1 - d_{15} = 12 - 0 - 3 = 9$$

$$MT(g) = y_6 - x_5 - d_{56} = 14 - 12 - 2 = 0$$

Diagramme PERT

Calcul des marges

➤ La marge libre:

La marge libre correspond à la plage de temps ou délai dans laquelle peut se déplacer librement la tâche sans retarder aucune autre tâche subséquente.

Marge libre tâche "ij" = Date au plus tôt "étape j" - Date au plus tôt "étape i" - Durée tâche "ij"

Appliquons le calcul à l'exemple précédent :

$$ML(a) = x_2 - x_1 - d_{12} = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$ML(b) = x_3 - x_2 - d_{23} = 7 - 5 - 2 = 0$$

$$ML(c) = x_4 - x_2 - d_{24} = 9 - 5 - 4 = 0$$

$$ML(d) = x_4 - x_3 - d_{43} = 9 - 7 - 1 = 1$$

$$ML(e) = x_5 - x_4 - d_{45} = 12 - 9 - 3 = 0$$

$$ML(f) = x_5 - x_1 - d_{15} = 12 - 0 - 3 = 9$$

$$ML(g) = x_6 - x_5 - d_{56} = 14 - 12 - 2 = 0$$

Diagramme PERT

Calcul des marges

➤ La marge certaine:

La marge certaine d'une tâche indique le retard que l'on peut admettre dans sa réalisation (quelle que soit sa date de début) sans allonger la durée optimale du projet.

Marge certaine tâche "ij" = $\text{Max} [0 , (\text{Date au plus tôt "étape j" } - \text{Date au plus tard "étape i" } - \text{Durée tâche "ij"})]$

Appliquons le calcul à l'exemple précédent :

$$\text{MC(a)} = x_2 - y_1 - d_{12} = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$\text{MC(b)} = x_3 - y_2 - d_{23} = 7 - 5 - 2 = 0$$

$$\text{MC(c)} = x_4 - y_2 - d_{24} = 9 - 5 - 4 = 0$$

$$\text{MC(d)} = x_4 - y_3 - d_{43} = 9 - 8 - 1 = 0$$

$$\text{MC(e)} = x_5 - y_4 - d_{45} = 12 - 9 - 3 = 0$$

$$\text{MC(f)} = x_5 - y_1 - d_{15} = 12 - 0 - 3 = 9$$

$$\text{MC(g)} = x_6 - y_5 - d_{56} = 14 - 12 - 2 = 0$$

On a toujours l'inégalité suivante:

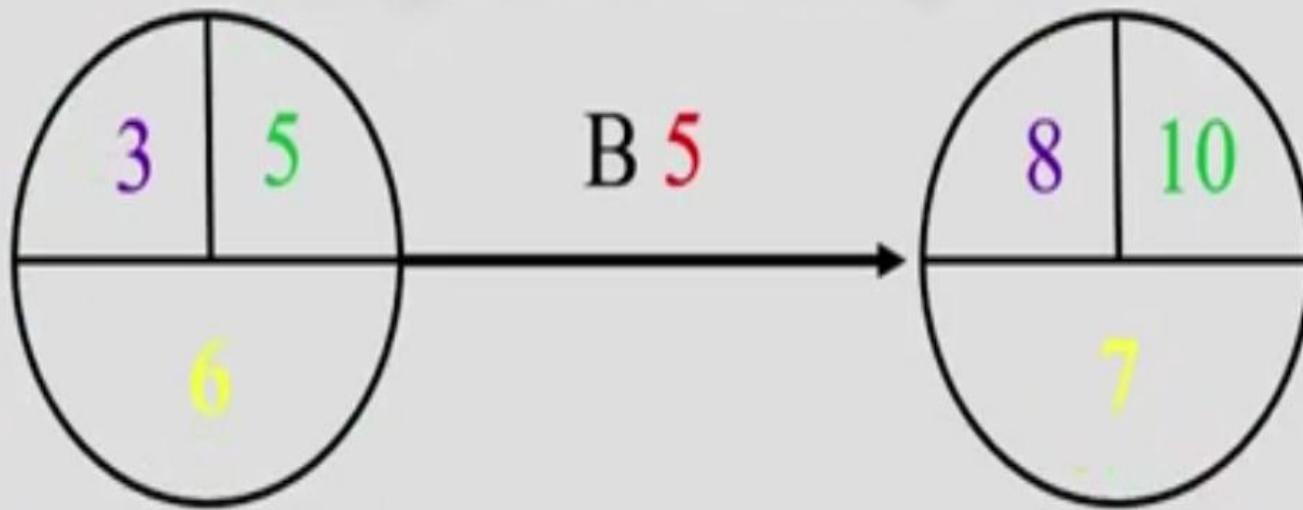
$$0 \leq \text{MC} \leq \text{ML} \leq \text{MT}$$

Diagramme PERT

Chemin critique

Le **chemin critique** correspond à la séquence de tâches qui détermine la durée totale du projet. Ce chemin est continu depuis le début jusqu'à la fin du projet. Tout retard affectant une tâche du chemin critique est intégralement répercuté sur la durée du projet et donc sa date de fin. La tâche critique est une tâche du chemin critique. Toute modification sur la durée d'une de ces tâches critiques impacte d'autant plus la durée totale du projet.

Les tâches qui sont sur le chemin critique ont une marge nulle



B : Repère de la tâche

5 : Durée prévue de la tâche (seconds, minutes, heures, semaines, jours, mois ...)

3 ; 8 : Date au plus tôt

5 ; 10 : Date au plus tard

6 ; 7 : Repère de l'étape

La tâche « B » de durée de 5 est située entre les deux étapes « 6 » et « 7 » dont les dates au plus tôt sont, respectivement, 3 et 8, les dates 5 et 10 sont les dates au plus tard

Deux tâches simultanées sont représentées par deux flèches différentes en partant de la même origine

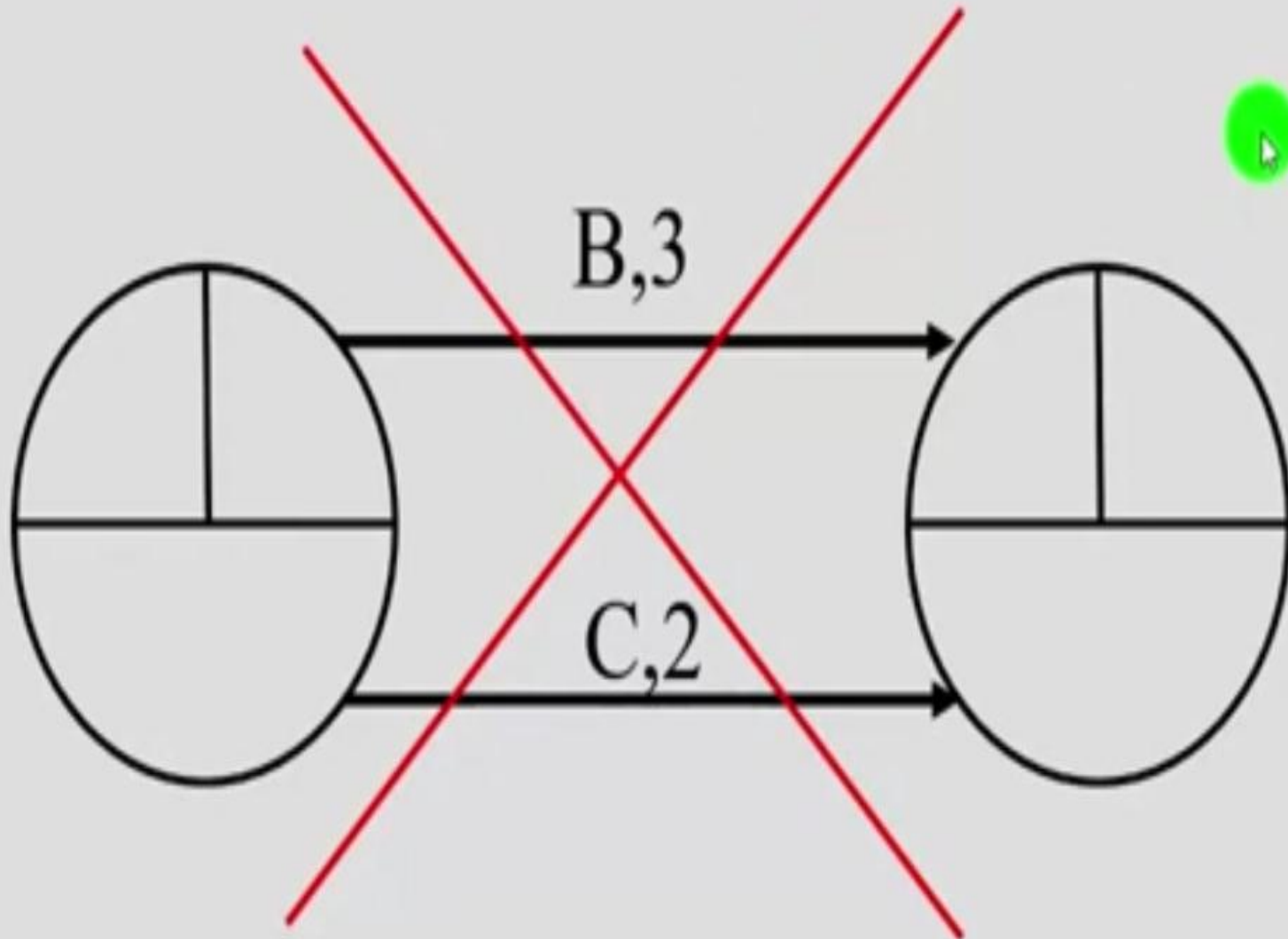
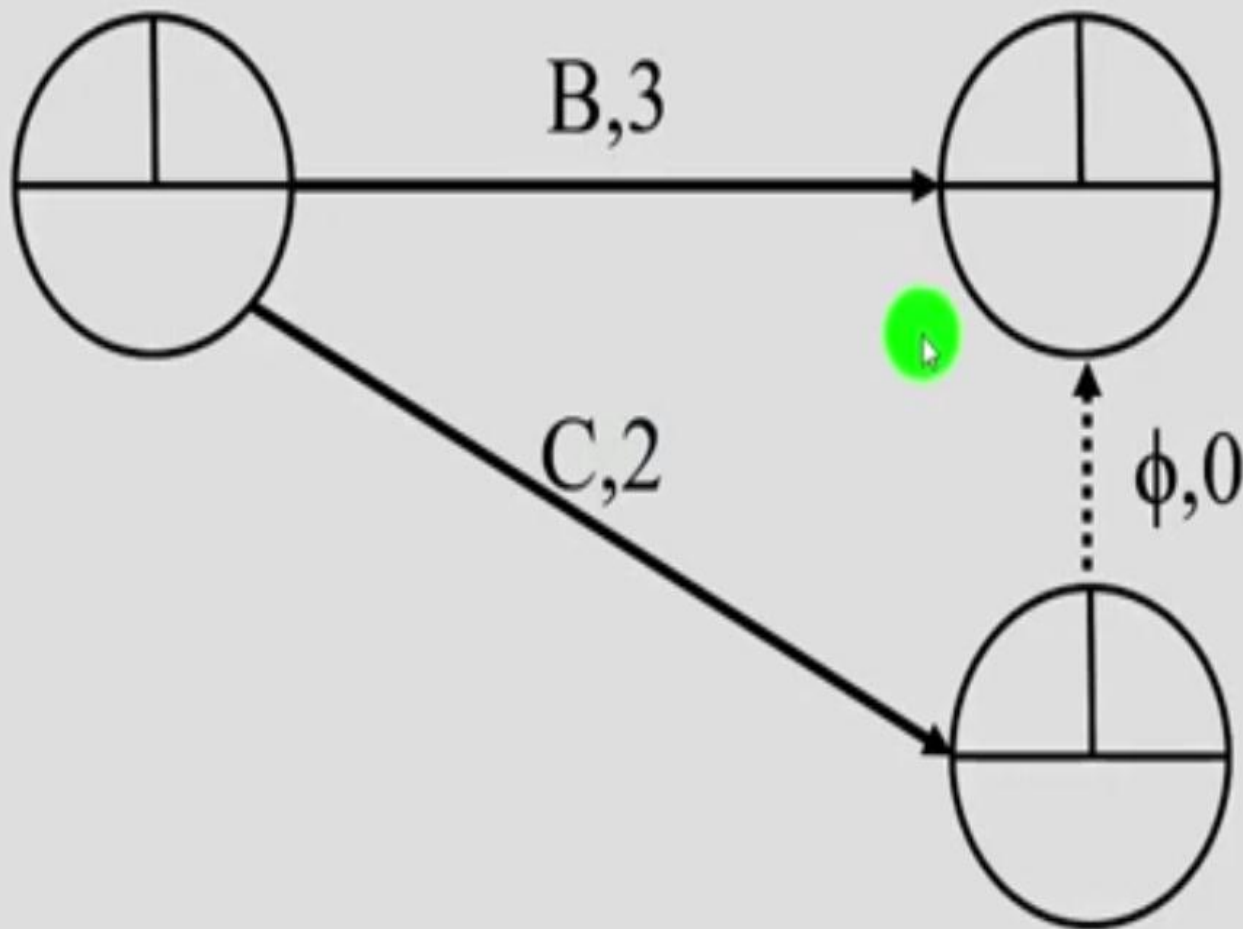


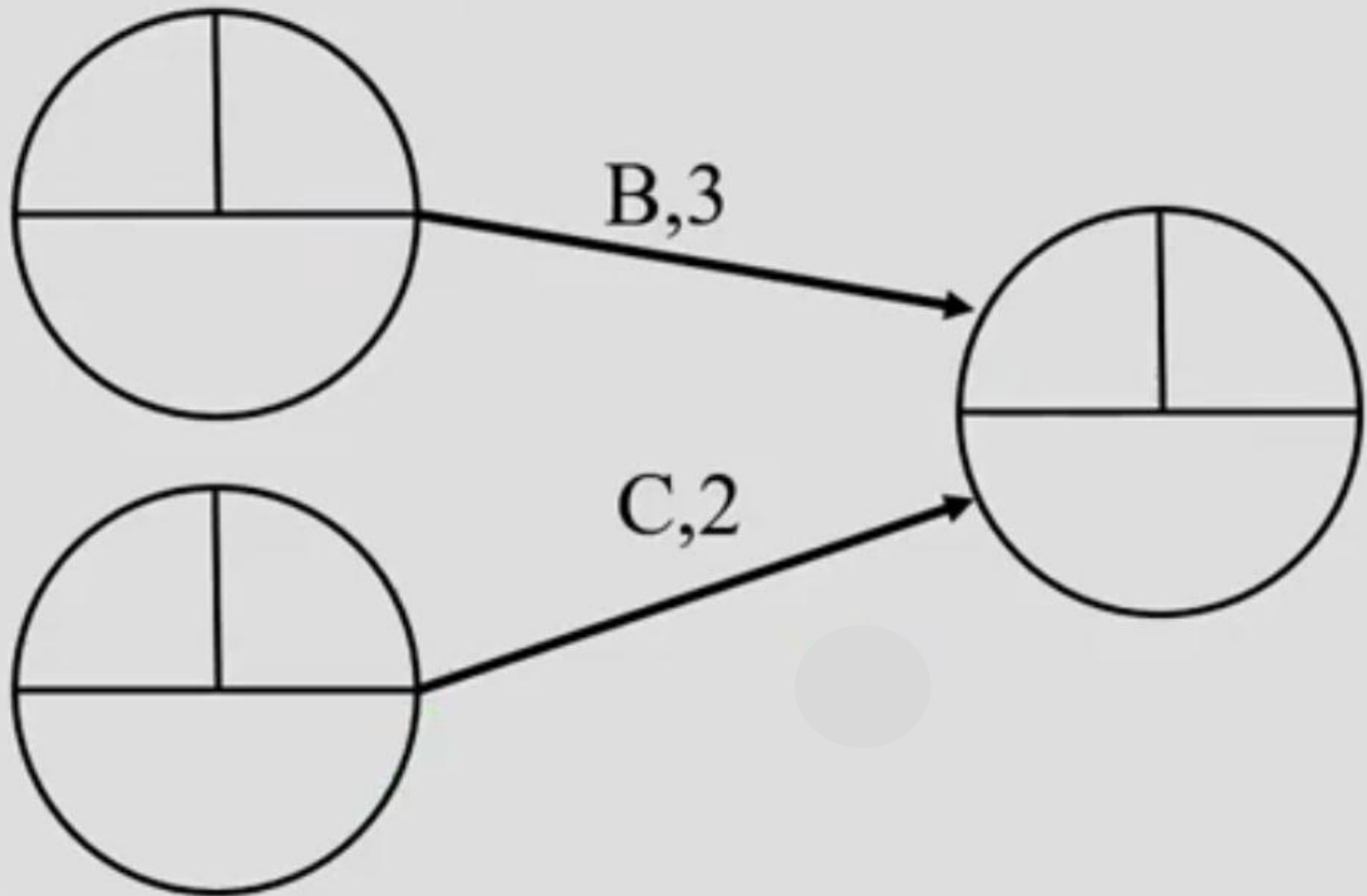
Diagramme de pert

Deux tâches simultanées sont représentées par deux flèches différentes en partant de la même origine



Tâche fictive : Tâche d'une durée nulle dans les réseaux PERT, servant à en synchroniser d'autres entre elles

Diagramme de pert



EXERCICE D'application 1

Exercice pédagogique TD : Préparer un repas.

1 Taches

- A : choisir le menu (30 min)
- B : acheter les ingrédients (90 min)
- C : préparer l'apéritif (30 min)
- D : nettoyer la table (10 min)
- E : mettre la table (10 min)
- F : préparer les ingrédients (30 min)
- G : cuisiner les plats (60 min)
- H : servir le repas (10 min)

2 Contraintes

- B doit être après A
- C et F doivent être après B
- E doit être après D
- G doit être après F
- H doit être après C, G et E

EXERCICE D'application 1

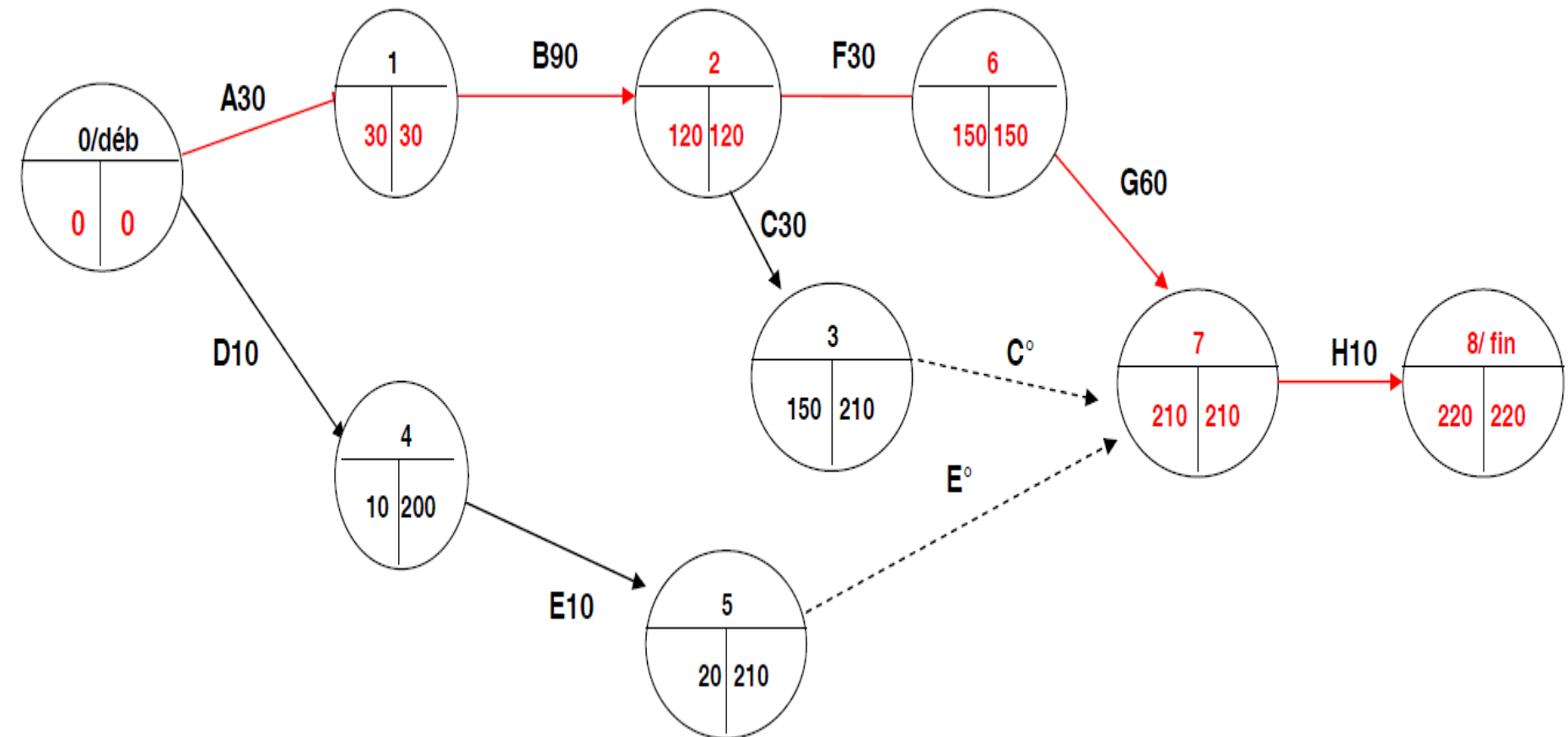
	Durée	antécédent	successeur
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			

Plutôt : entre deux valeurs, on choisi la plus grande (Max)

Plus tard : entre deux valeurs, on choisi la plus petite (Min)

Chemin critique : est représenté par les taches dont les dates (début/fin) sont égales

EXERCICE D'application 1



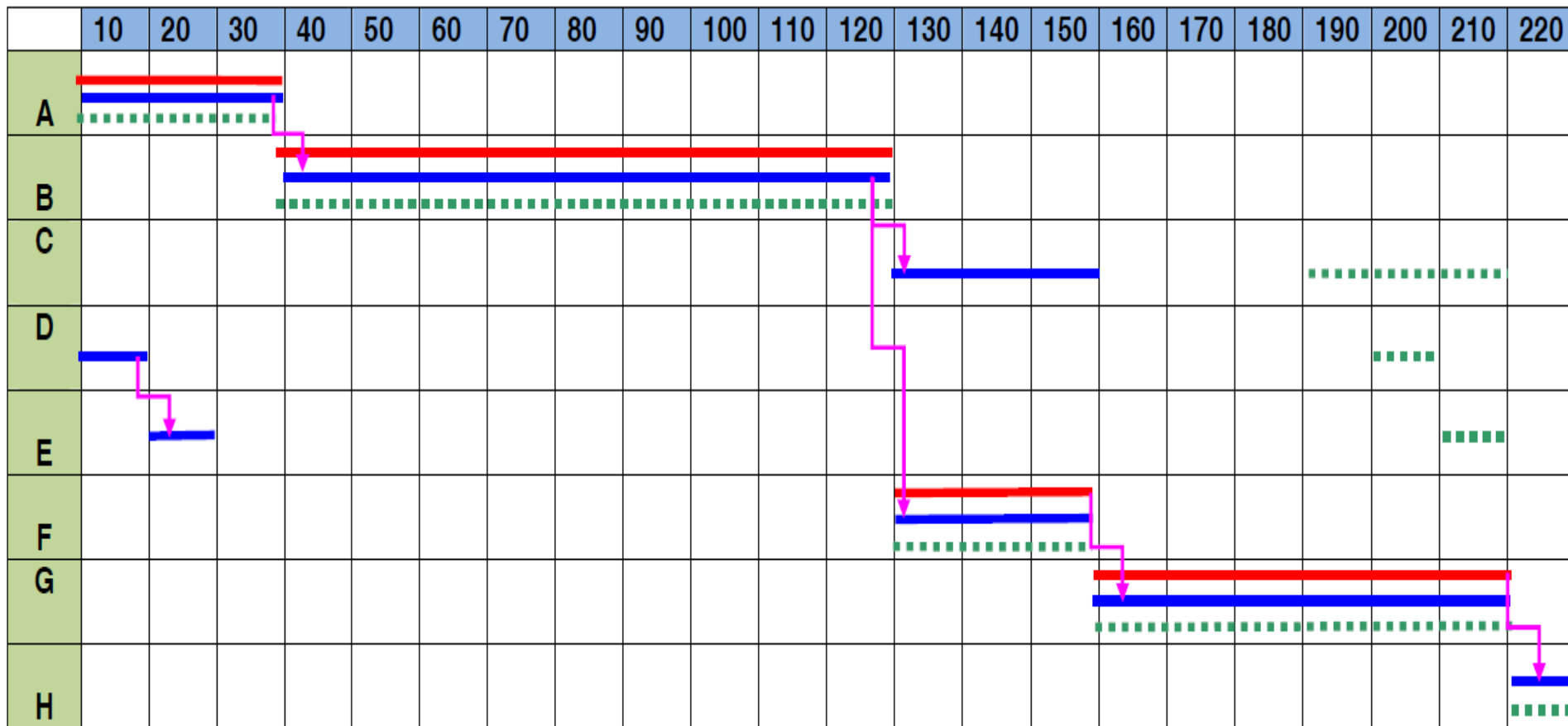
EXERCICE D'application 1

Date de plutôt		
	DTO	FTO
A	0	30
B	30	120
C	120	150
D	0	10
E	10	20
F	120	150
G	150	210
H	210	220

Date du plus tard		Marge
Dta	Fta	
0	30	0
30	120	0
180	210	60
190	200	190
200	210	190
120	150	0
150	210	0
210	220	0

Chemin critique : A-B-F-G-H

EXERCICE D'application 1



————— Réseau au plutôt
..... Réseau au plus tard
————— Chemin critique

Le formalisme réseau

- **Lien (ou dépendance)**: relation entre deux tâches représentée par une flèche
- **Réseau (réseau logique)**: ensemble de tâches et de liens représenté par un ensemble de barres et de flèches

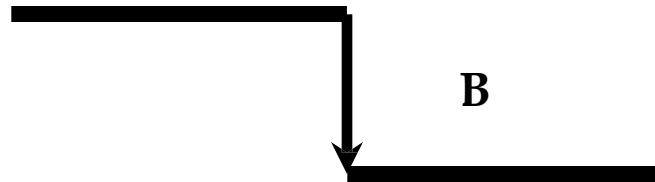
Le formalisme réseau

Début



Fin

A

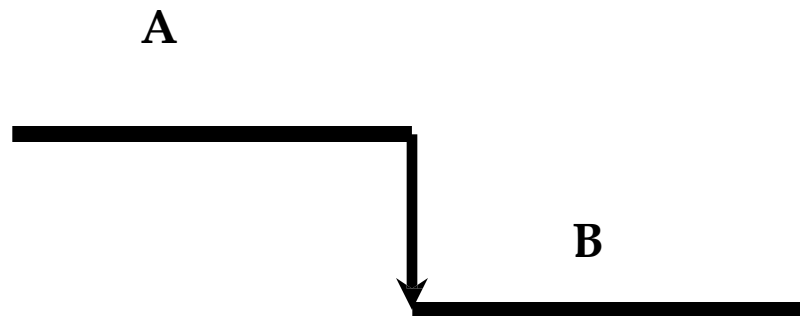


B

Le formalisme réseau

- **fin à début**: de la fin de l'antécédent au début du successeur
- **début à début**: du début de l'antécédent au début du successeur
- **fin à fin**: de la fin de l'antécédent à la fin du successeur
- **début à fin**: du début de l'antécédent à la fin du successeur

Le formalisme réseau



B ne peut pas débuter avant la fin de A

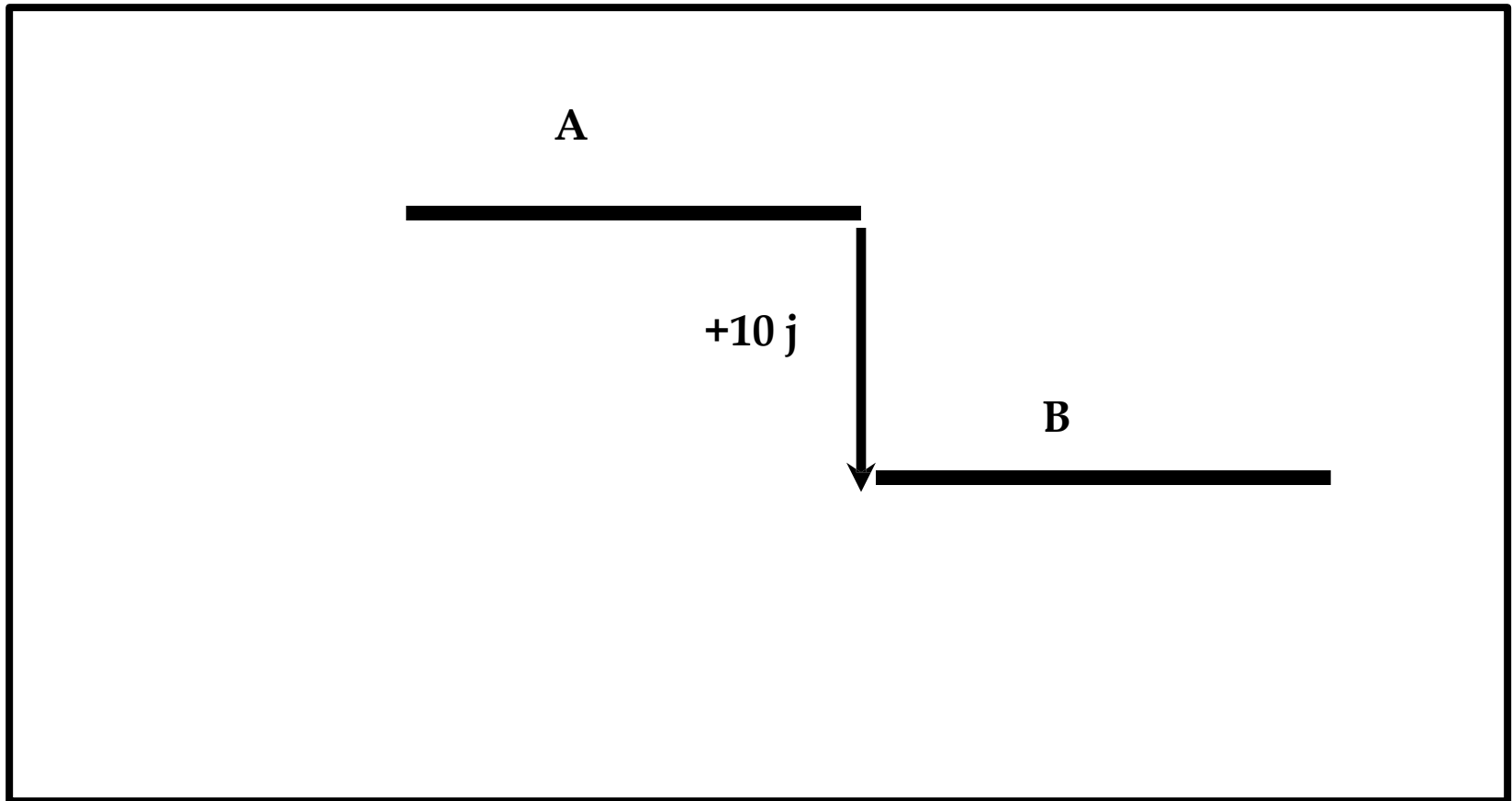
Le formalisme réseau

- La tâche B (le successeur) peut débuter lorsque la tâche A (l'antécédent) est terminée
- Les liens Fin à Début sont les liens les plus fréquents
 - ✓ Environ 90% des liens effectivement rencontrés dans les réseaux

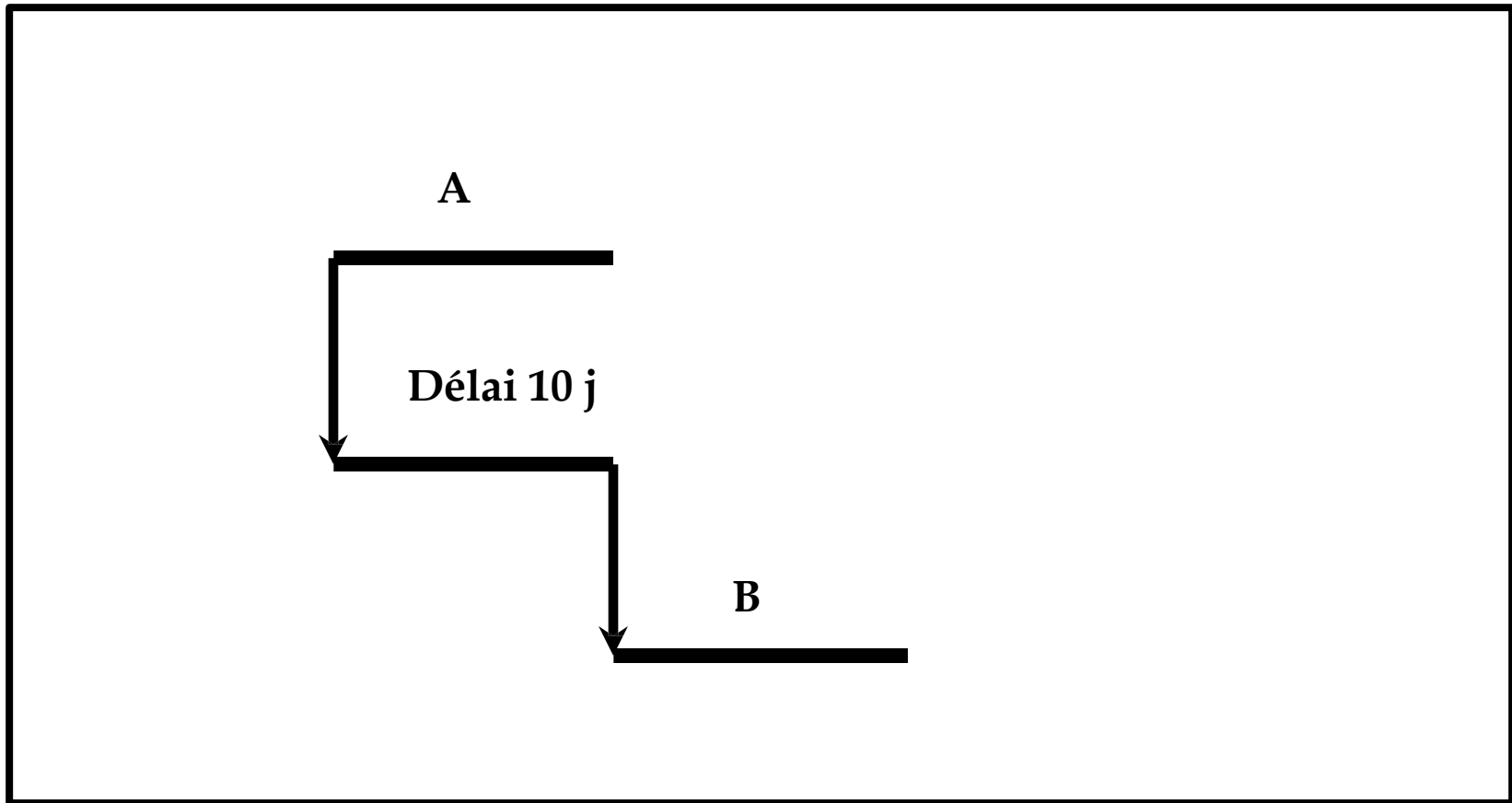
Le formalisme réseau

- Un lien peut être caractérisé par une valeur positive ou négative: **le délai**
- **Délai**: durée minimale (en valeur algébrique) qui doit séparer le successeur de l'antécédent
- **Délai**: indique une période d'attente et permet d'éviter de créer une tâche fictive intermédiaire

Le formalisme réseau



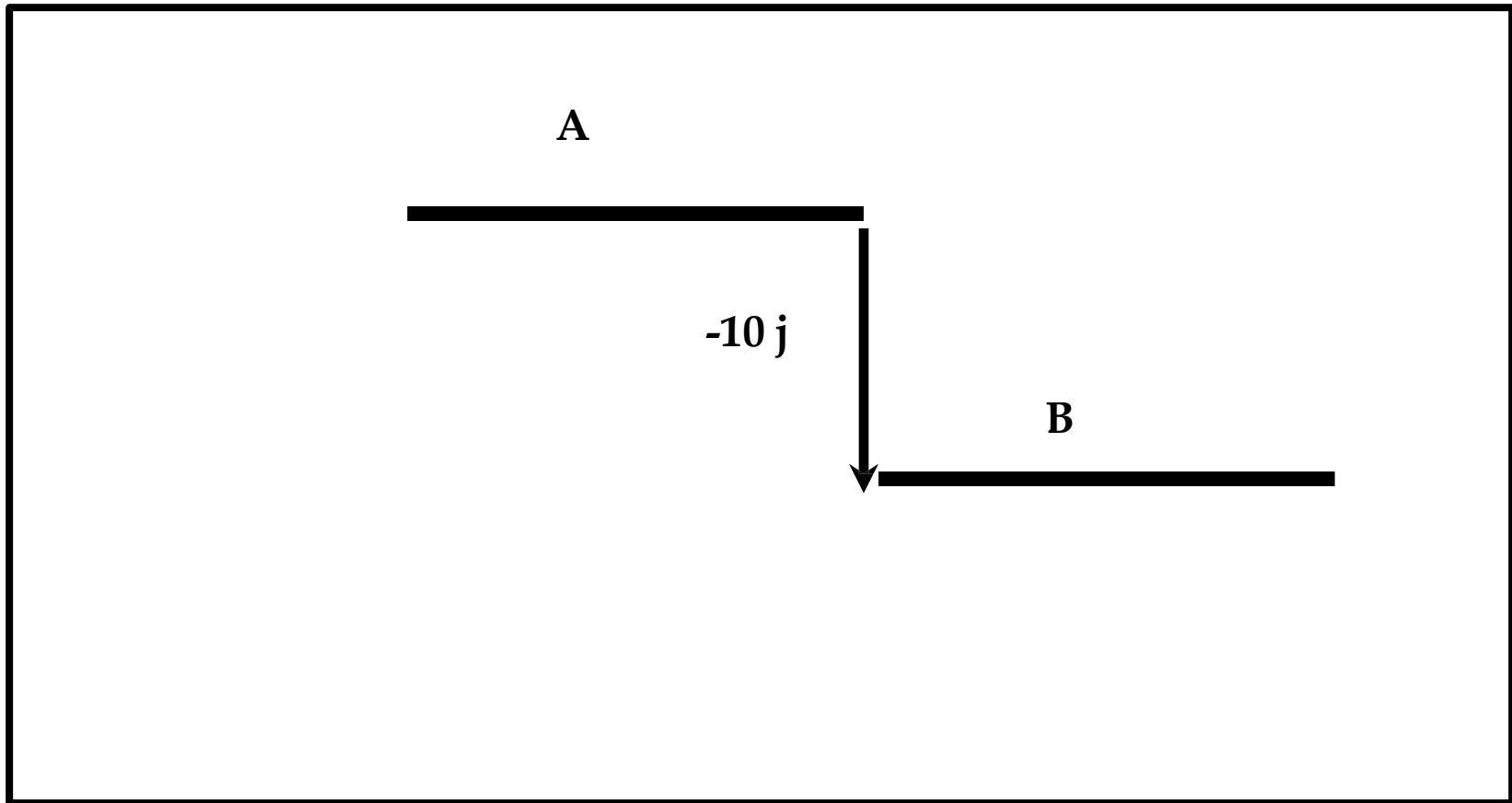
Le formalisme réseau



Le formalisme réseau

- Délai négatif sur un lien: permet d'indiquer que le successeur peut avoir lieu avant l'antécédent
- Délai positif: retard
- Délai négatif: avance

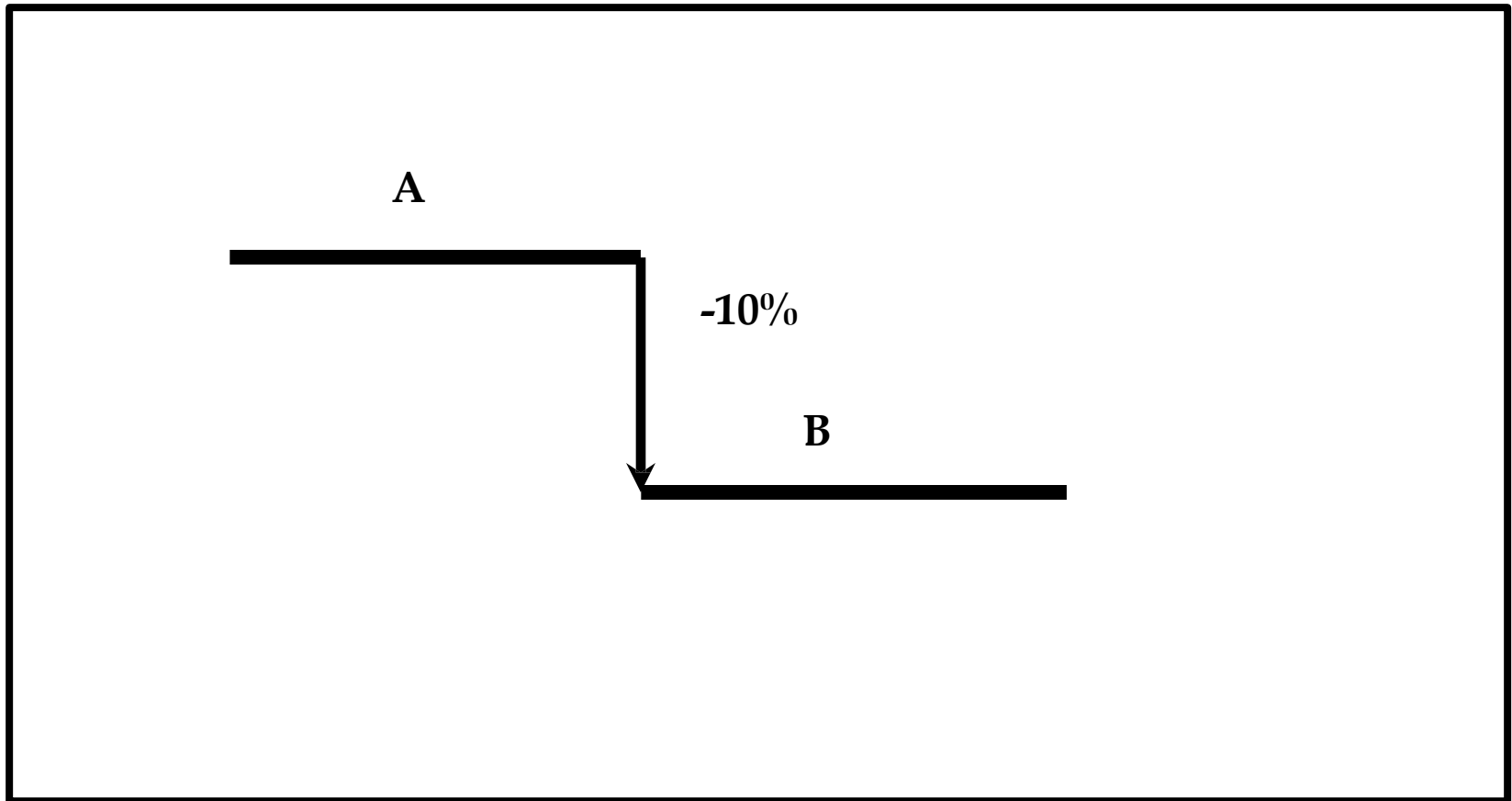
Le formalisme réseau



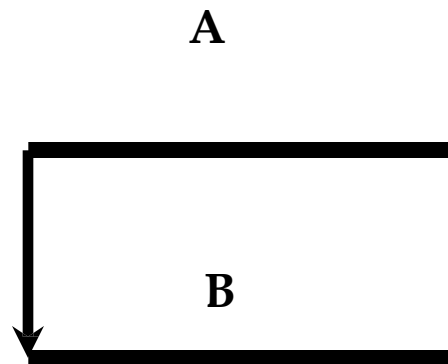
Le formalisme réseau

- unités de temps: jours calendaires, jours ouvrés, semaines, mois,...
- pourcentage de l'antécédent

Le formalisme réseau



Le formalisme réseau

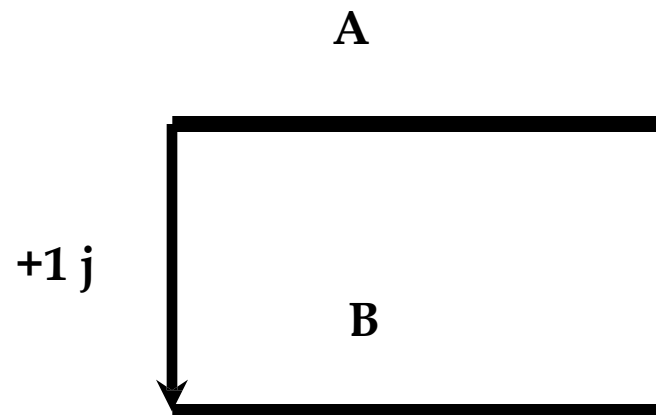


B ne peut pas débiter avant le début de A
B doit commencer quand A commence

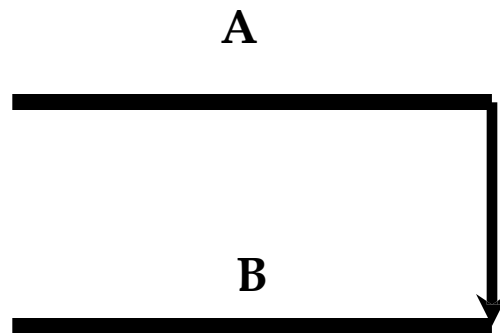
Le formalisme réseau

- La tâche B (le successeur) peut débuter lorsque la tâche A (l'antécédent) est commencée.
- Environ 5% des liens rencontrés dans les réseaux sont des liens de type Début à Début

Le formalisme réseau



Le formalisme réseau

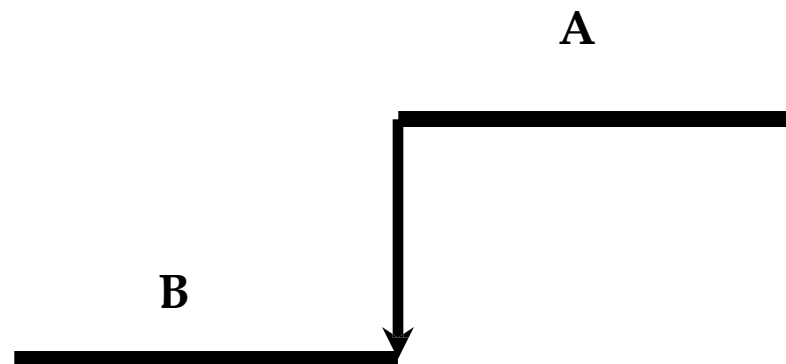


B ne peut pas terminer avant la fin de A

Le formalisme réseau

- La tâche B (le successeur) peut se terminer lorsque la tâche A (l'antécédent) est terminée
- Ces liens sont aussi fréquemment rencontrés dans les réseaux que les liens Début à Début

Le formalisme réseau



B ne peut pas finir avant le début de A

Le formalisme réseau

- La tâche B (le successeur) peut se terminer lorsque la tâche A (l'antécédent) est commencée
- Ces liens sont très rares dans les réseaux

Le formalisme réseau

- Tâches d'un réseau: reliées les unes aux autres par des liens
- Toutes les combinaisons de liens sont possibles sauf la boucle
- **Exemples**

Le formalisme réseau

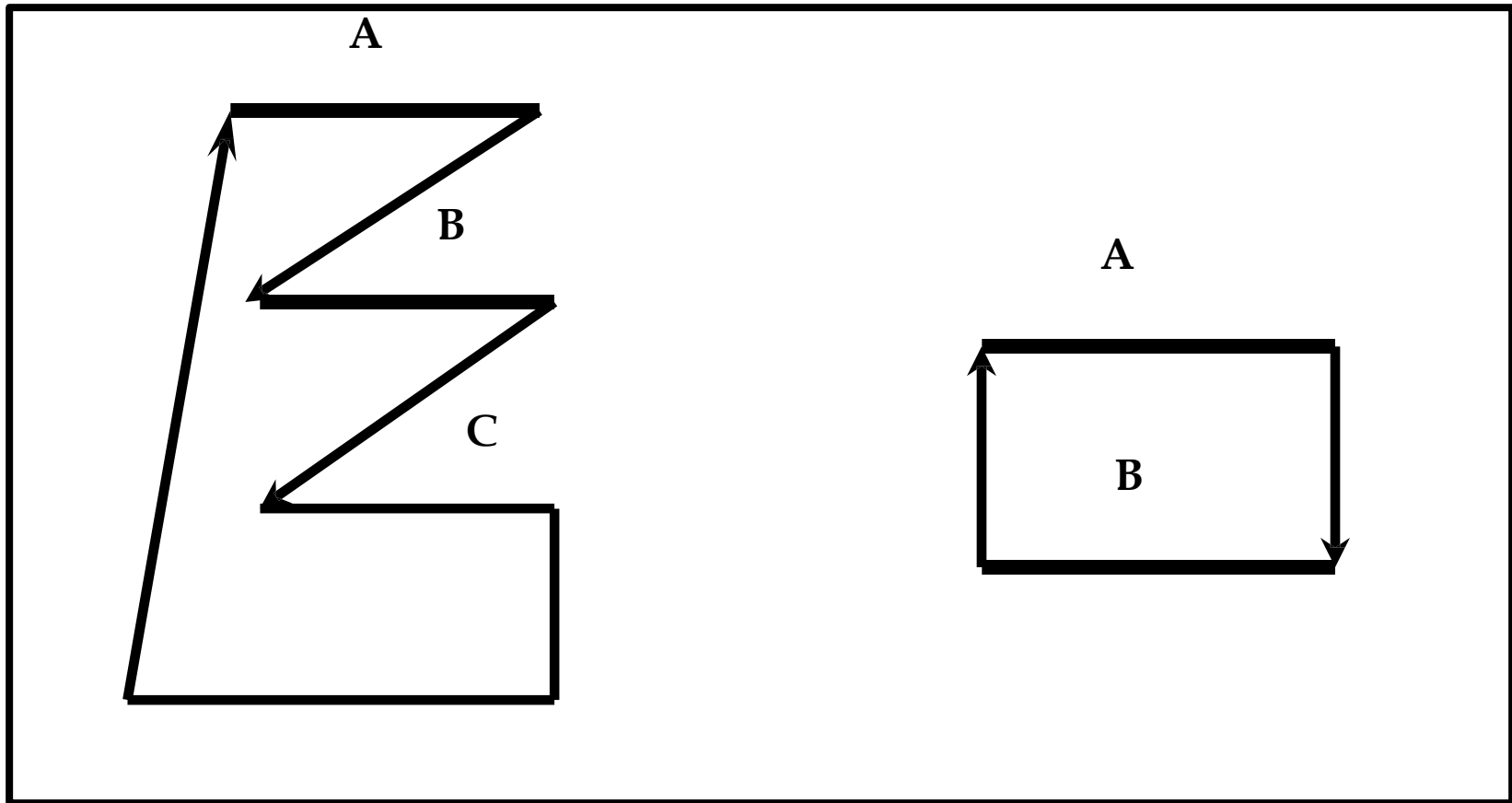


Diagramme de GANTT

Objectifs

- Réaliser le diagramme de Gantt
- Définir les besoins en ressources à l'aide du diagramme de Gantt

Diagramme de GANTT

Les tâches ou activités sont ordonnées sur une échelle de temps en fonction des antériorités entre les tâches, de la disponibilité des moyens matériels...

Ce diagramme (ou planning) présente un certain nombre d'avantages :

- Lecture simple et accessible à tous.
- Le suivi peut s'effectuer facilement lors du déroulement du projet en comparant les dates prévues et les dates réelles.
- Les dates de début et de fin de chaque tâche sont lues directement sur l'échelle de temps.
- Il permet en affectant les ressources aux tâches d'établir le plan de charge.

Diagramme de GANTT

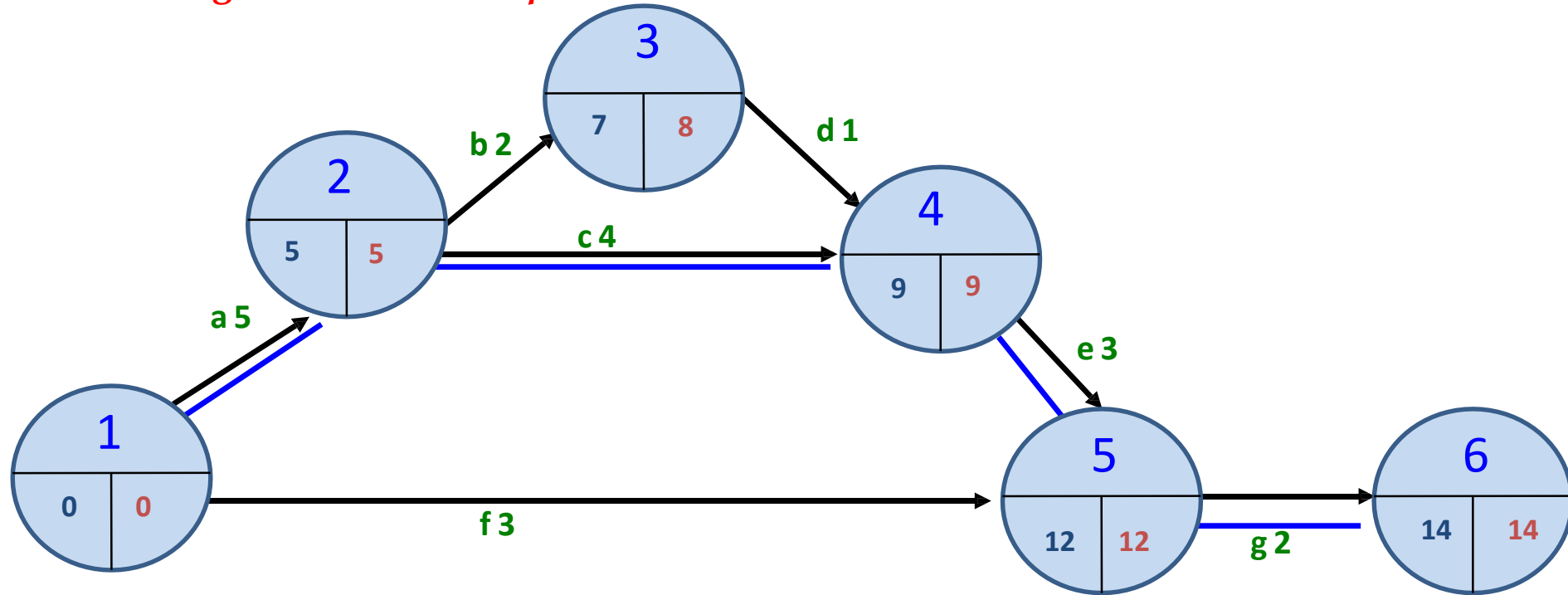
Par contre il possède un désavantage important : pas de mise en évidence des relations d'antériorité existant entre les tâches.

Cela entraîne les inconvénients suivants :

- en cours de déroulement du projet si une tâche prend du retard on ne peut déterminer si cela aura une influence sur la fin du projet.
- lors de la mise à jour du planning on décale les tâches en retard vers la droite on ne peut déterminer quelles sont les tâches.

Diagramme de GANTT

Soit le diagramme de PERT précédent



Pour réaliser le diagramme de Gantt au plus il suffit de reporter pour chaque tâche, sur un diagramme avec une échelle de temps des barres dont la longueur est proportionnelle à la durée et dont le début de la barre coïncide avec la date de début au plus tôt.

Diagramme de GANTT

pour la tâche a elle a une durée de 5 minutes son début au plus tôt est 0

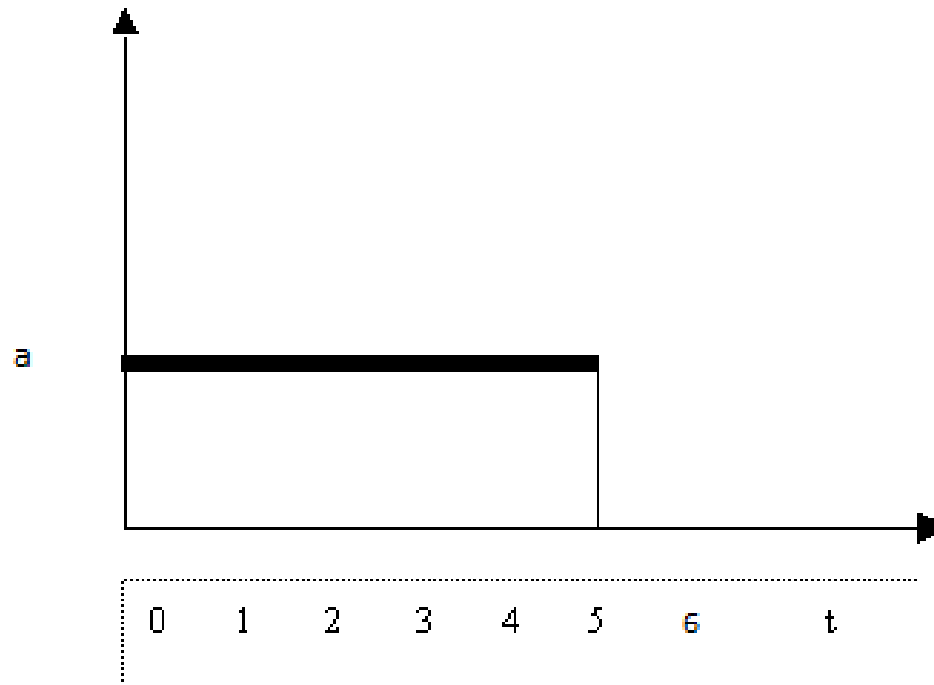
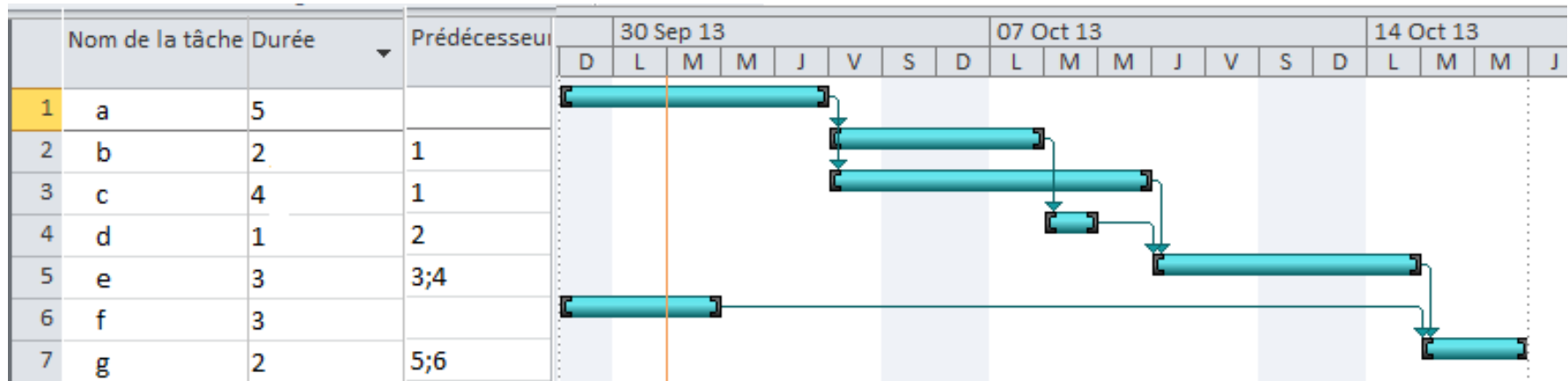


Diagramme de GANTT

Pour l'ensemble du Projet le diagramme de Gantt sera :



Les ressources

Les ressources sont des mise à disposition pour mener à bien le projet.

- Des moyens humains,
- Des moyens matériels,
- Des matériaux...

Pour gérer les ressources, il faut définir pour chacune d'elles:

- ✓ Le coût par unité de temps,

exemple: ouvrier 250 DH/h

- ✓ La disponibilité,

exemple: ouvrier disponible 7h30 heures/jour

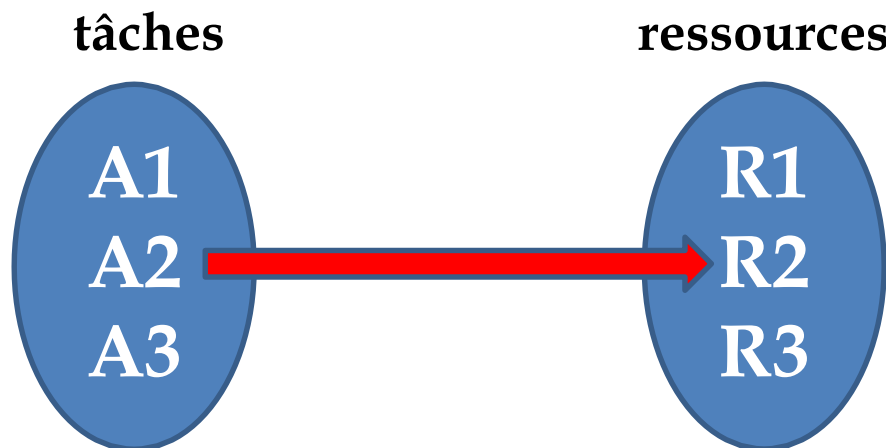
L'optimisation du projet repose sur l'ordonnancement des tâches, mais aussi sur la gestion des ressources affectées aux tâches critiques. Il est ainsi possible:

Les ressources

D'échanger des ressources avec des tâches non-critiques,
d'affecter des ressources supplémentaires:

- Heures supplémentaires,
- Location de matériels,
- Recours à la sous-traitance
- Etc...

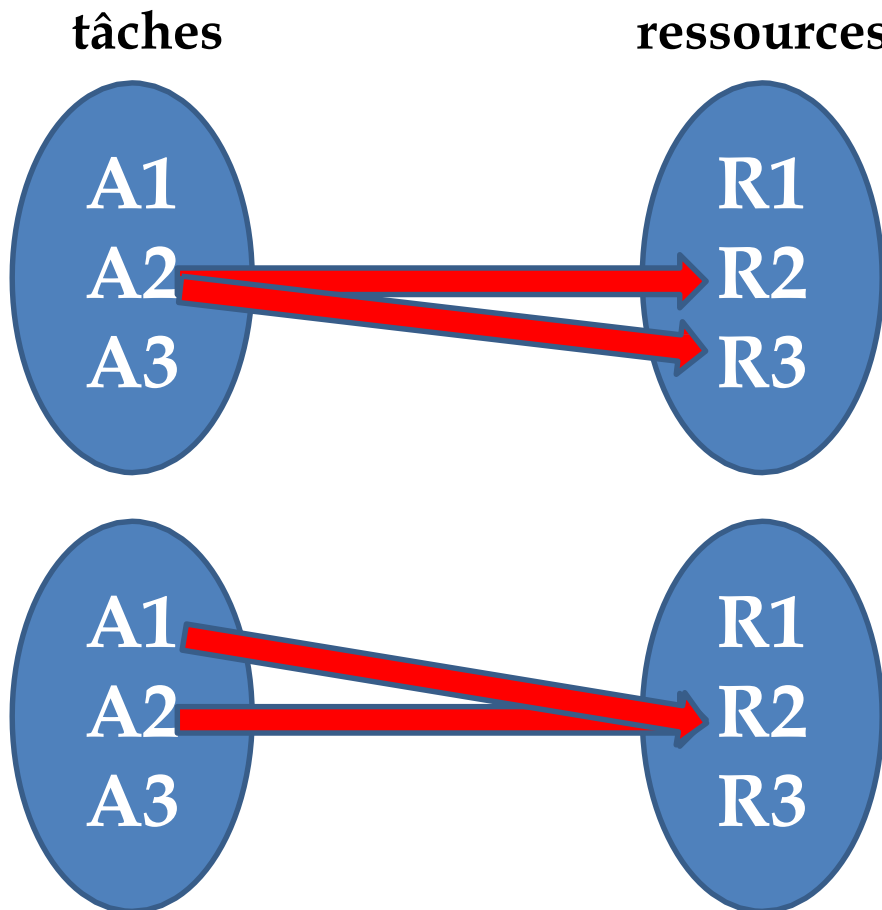
Affectation des ressources à des tâches



Une tâche est faite
par une ressource

Les ressources

Affectation des ressources à des tâches



Une tâche est faite
par « **n** » ressources

«**n**» tâches se
partagent la même
ressource

Capacité-Charge-Délai

Exemple1

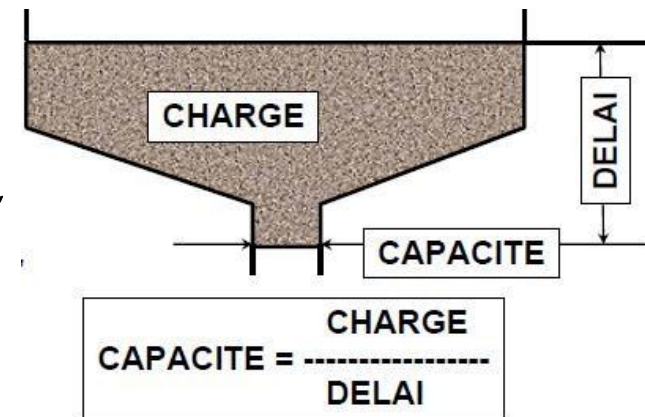
CHARGE= 300 heures de travail,
CAPACITE= 30 heures de travail par semaine,
DELA I= 10 semaines.

Exemple2

CHARGE= 15.000 produits à fabriquer,
CAPACITE= 1.000 produits par jour,
DELA I= 15 jours.

Exemple3

CHARGE= 40 km de câble à fabriquer,
CAPACITE= 500 m de câble par mois,
DELA I= 8 mois.



Capacité-Charge-Délai

La durée de la tâche, la charge de travail nécessaire à la bonne réalisation de la tâche et la capacité allouée de la ressource affectée à la tâche sont liées par la relation:

$$\text{durée} \times \text{capacité} = \text{charge}$$

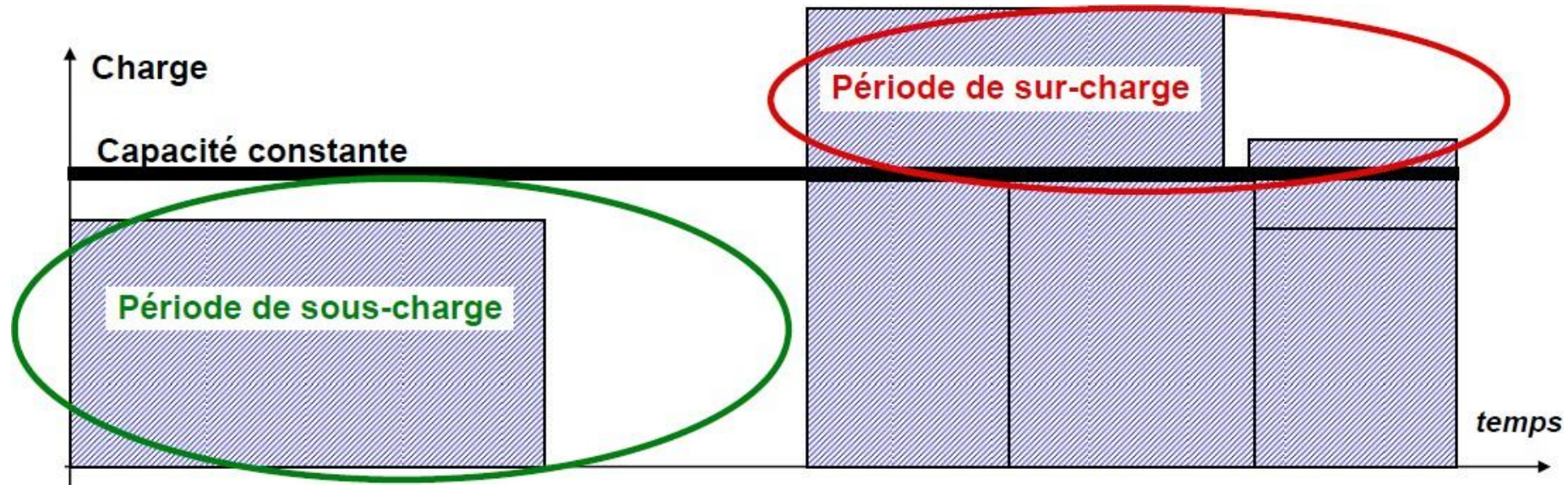
1. Si la durée de la tâche et la charge qu'elle représente sont connues alors on calcule la capacité nécessaire.
2. Si la durée de la tâche et la capacité de la ressource sont connues alors on calcule la charge correspondante.
3. Si la charge de la tâche et la capacité de la ressource sont connues alors on calcule la durée de la tâche.

Les différentes modes d'affectation

Lors de l'affectation d'une ressource à une tâche, il y a 3 possibilités:

1. TAUX FIXE: quand la capacité est connue.
2. CHARGE FIXEE: quand la charge de travail est connue.
3. PLAN DE CHARGE: quand la capacité allouée n'est pas uniforme pendant la durée de la tâche.

Histogramme de charge et de capacité



➤ **Calcul de la charge globale:**

$\text{capacité} \times \text{temps} \geq \sum \text{aires hachurées} = \text{charge}$

➤ **Lissage de la charge:**

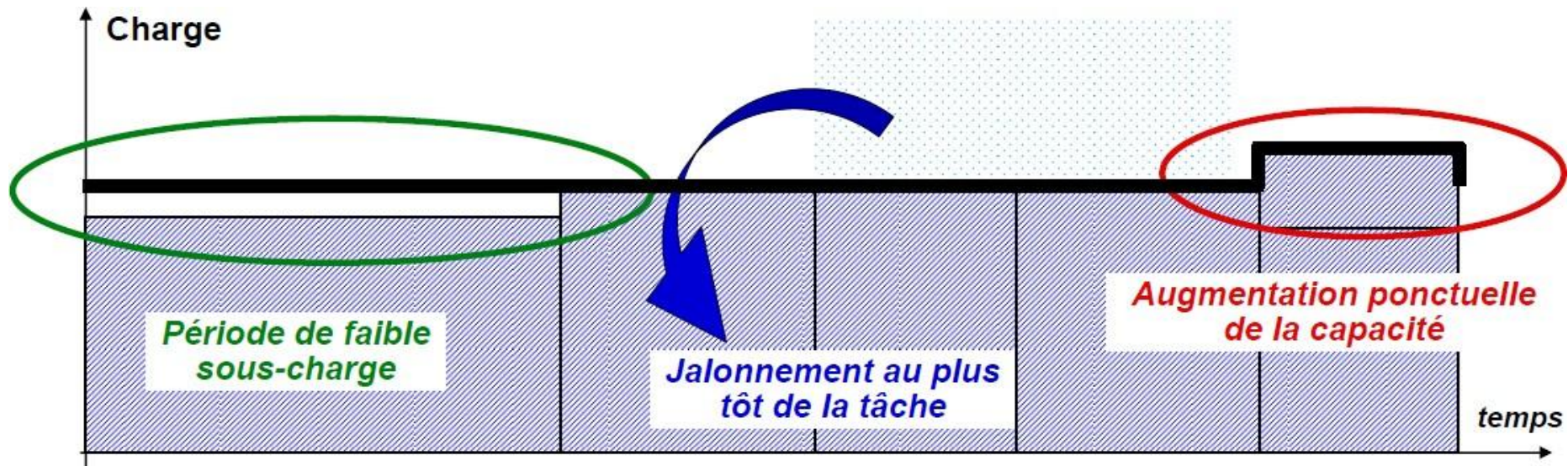
$\forall \text{ « t » on doit avoir: } \text{capacité}(t) \geq \text{charge}(t)$

Histogramme de charge et de capacité

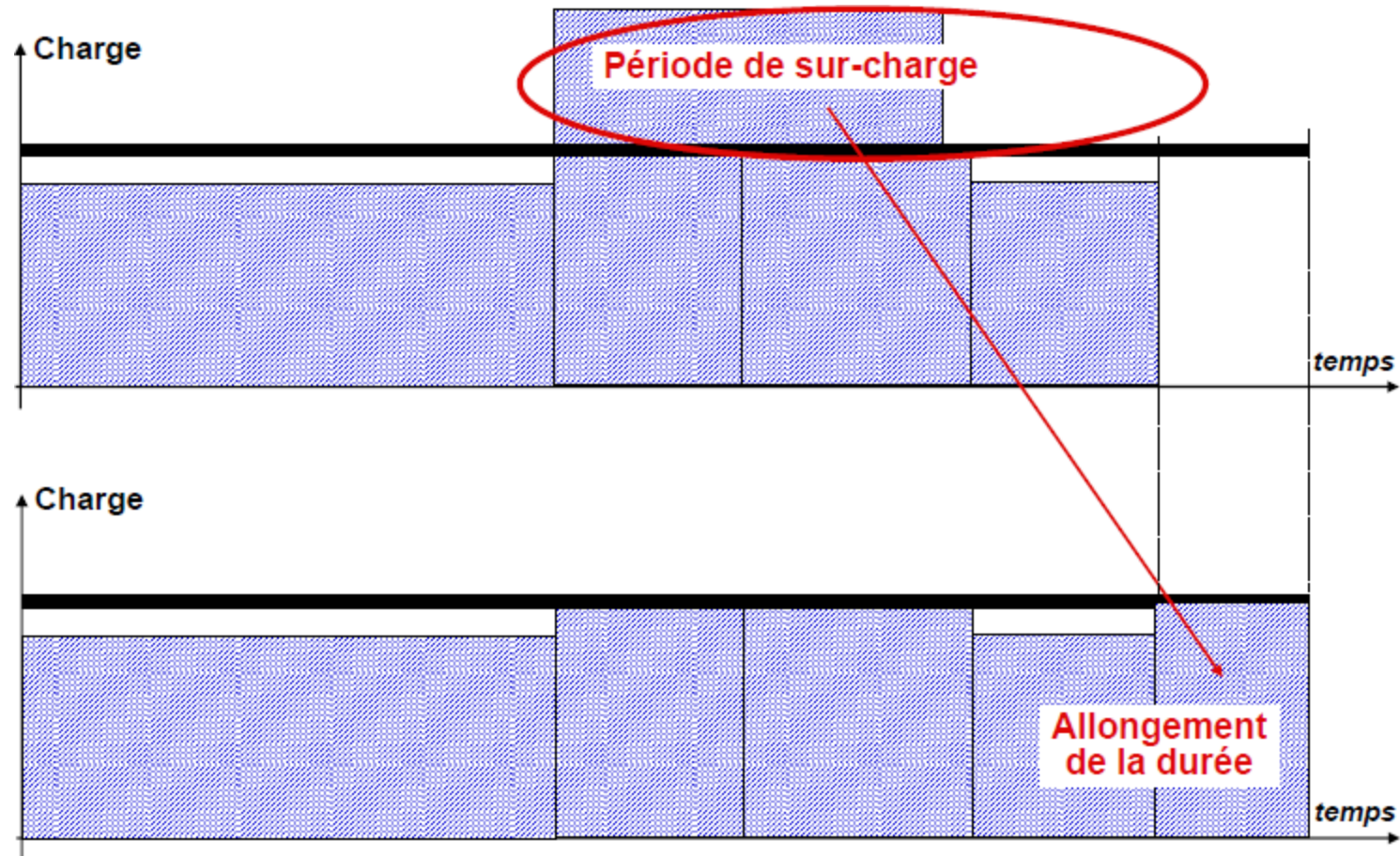
➤ Méthodes utilisées

1. Jalonner au plus tôt certaines tâches
2. Réduire la durée de certaines en augmentant les moyenne mise en œuvre.
3. Augmenter ponctuellement la capacité

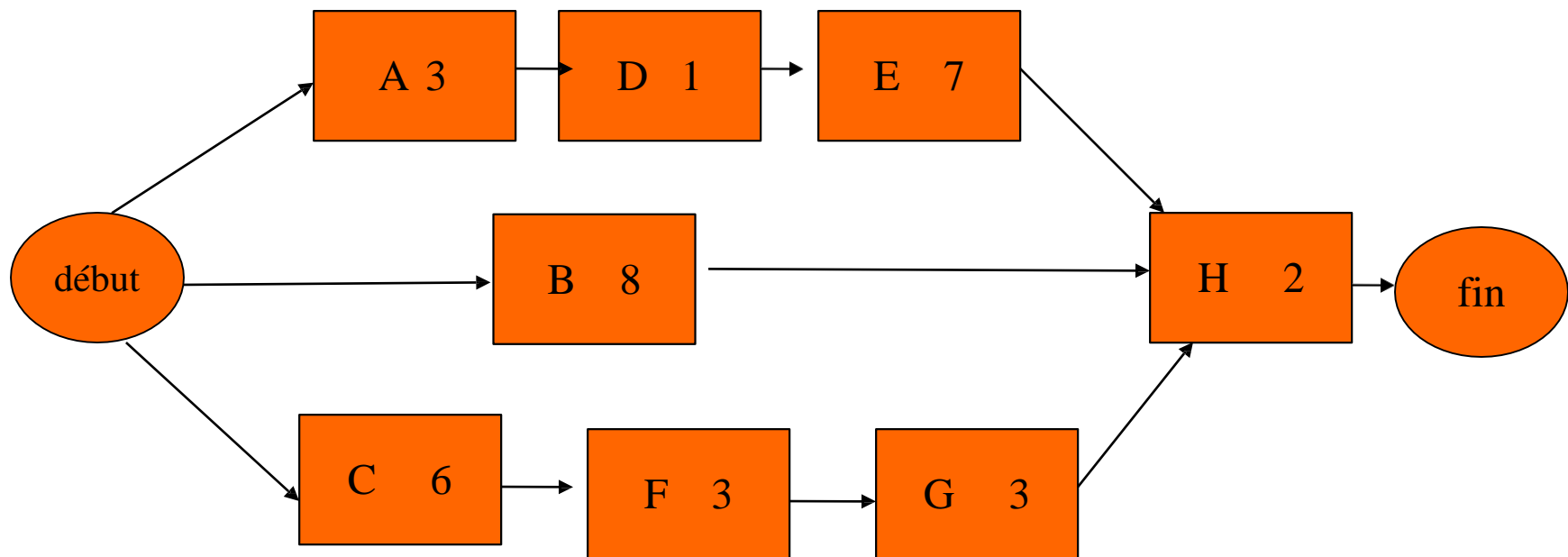
Techniques de lissage de la charge



Fonction de nivellement de ressource



Le diagramme de GANTT

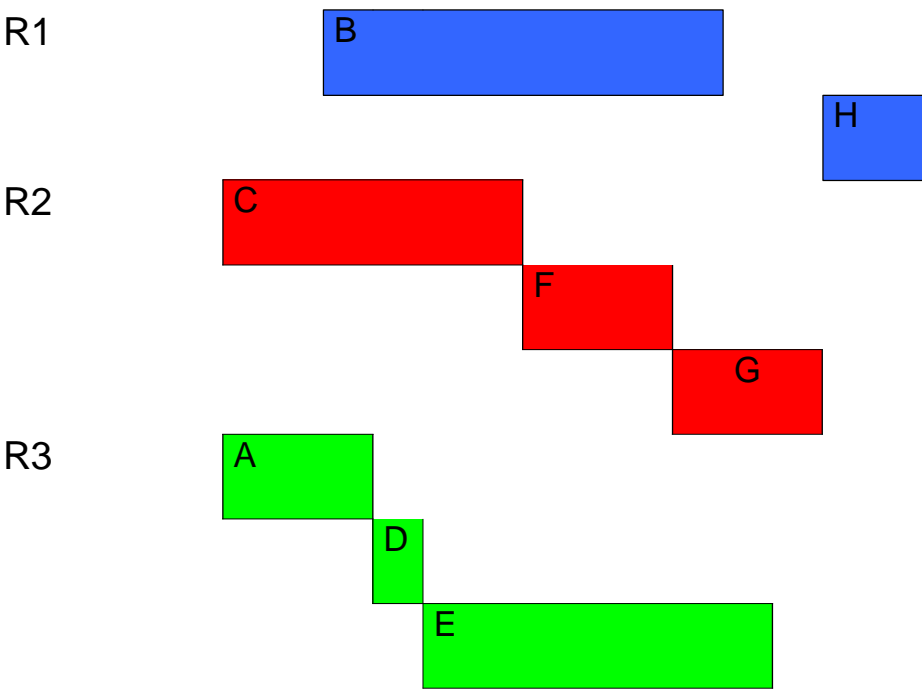


Le diagramme de GANTT

Périodes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	
										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4

Ressources

Avant :
3 personnes

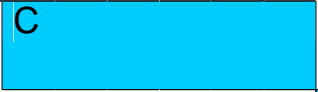


Le diagramme de GANTT

Périodes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4

Ressources

R1



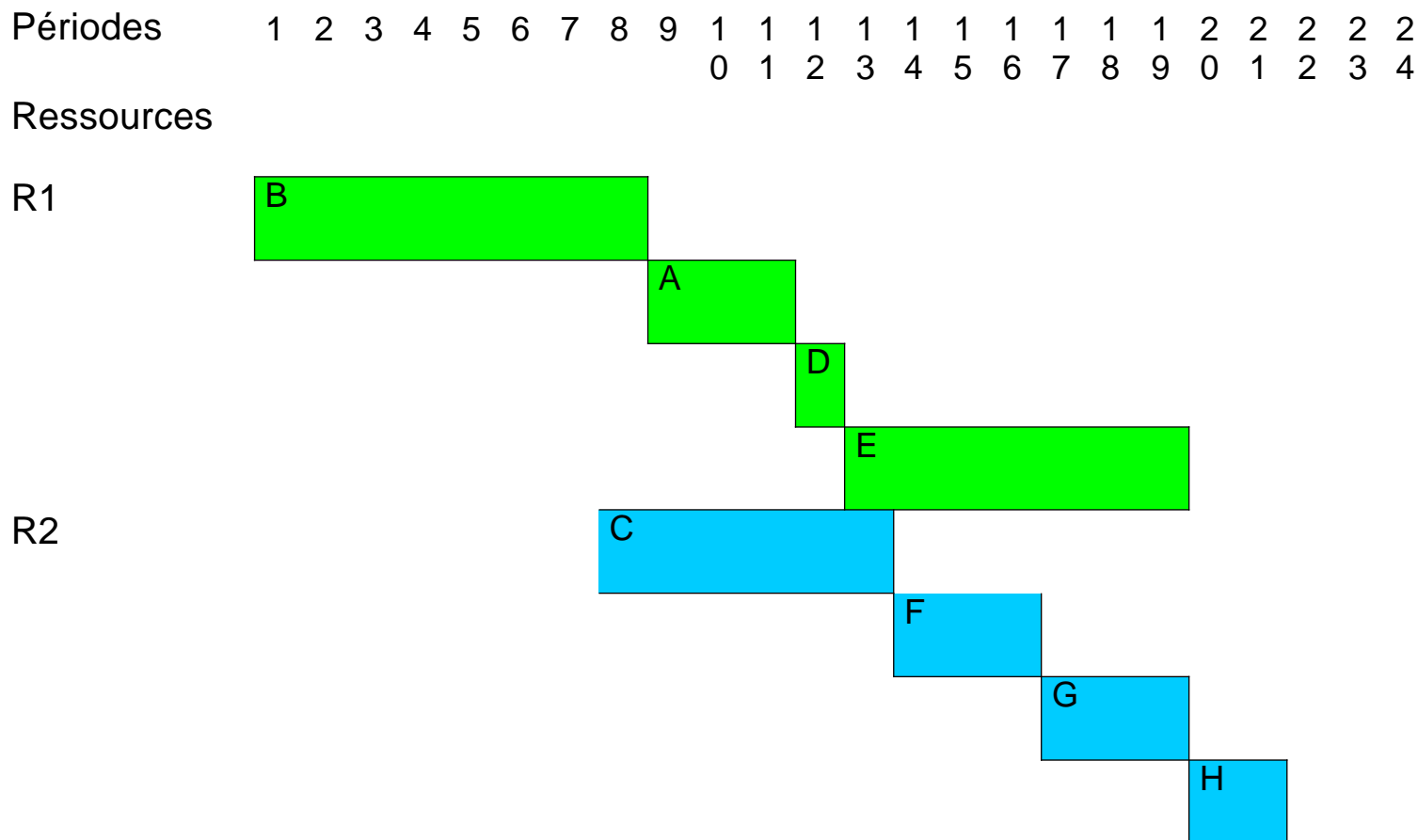
R2



Après :
2 ressources

Le diagramme de GANTT

Après :
2 personnes
variante



Le diagramme de GANTT

Périodes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4

Ressources

R1 (50%)



R2



R3

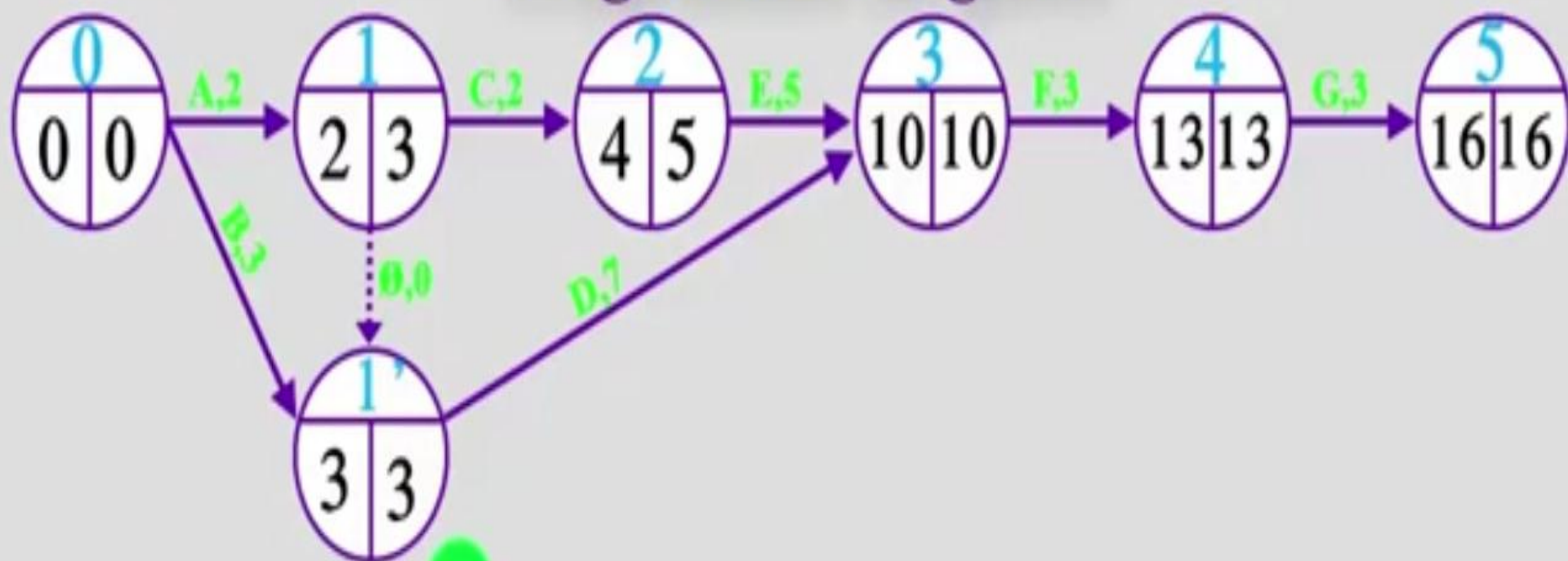


+ 1 personne
à mi temps

EXERCICE D'application 2

Tache	Durée (jours)	Tache antérieures	Tache postérieures	Rang
A	2	—		
B	3	—		
C	2	A		
D	7	A-B		
E	5	C		
F	3	D-E		
G	3	F		

Diagramme de gantt

[illegible]